

2026 年度 論理回路

第 4 回講義資料

情報コース 小野寺 優希也

【本日の内容】

- ブール代数に関する基本的な概念を説明できる。
- 論理式の簡単化の概念を説明できる。

§ 1

論理式と論理回路

前回は、論理積（AND）、論理和（OR）、論理否定（NOT）などの基本的な論理演算と、それらを実現する論理回路について扱った。論理回路の入力と出力の関係は、論理式を用いて表すことができる。入力を A, B 、出力を Y とすると、表 1.1 となる。

表 1.1 基本論理演算と論理式

論理演算	論理式
論理積（AND）	$Y = A \cdot B$
論理和（OR）	$Y = A + B$
論理否定（NOT）	$Y = \bar{A}$
排他的論理和（XOR）	$Y = A \oplus B$

論理式が与えられたら、対応する演算素子を順につないで論理回路をかくことができる。

例題 1.1

次の論理式を表す論理回路を書け。

- $Y = A + (A \cdot B)$
- $Y = A \cdot (\bar{A} + B)$

解答

1. 図 1.1 となる.

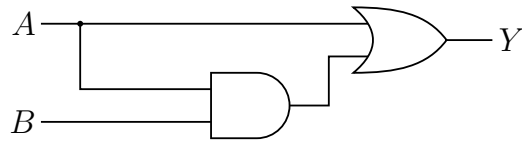


図 1.1 $Y = A + (A \cdot B)$ を表す論理回路

2. 図 1.2 となる.

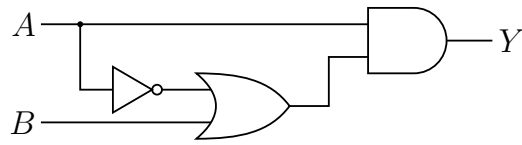


図 1.2 $Y = A \cdot (\bar{A} + B)$ を表す論理回路

□

問題 1.2

次の論理式を表す論理回路を書け.

1. $Y = A \cdot (A + B)$

2. $Y = A + (\overline{A} \cdot B)$

問題 1.2

次の論理式を表す論理回路を書け.

1. $Y = A \cdot (A + B)$
2. $Y = A + (\bar{A} \cdot B)$

解答

1. 図 1.3 となる.

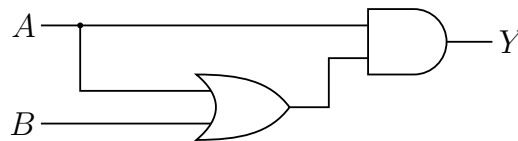


図 1.3 $Y = A \cdot (A + B)$ を表す論理回路

2. 図 1.4 となる.

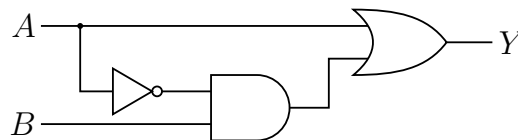


図 1.4 $Y = A + (\bar{A} \cdot B)$ を表す論理回路

□

§2 ブール代数

論理回路は論理式によって表すことができるが、同じ入出力関係を表す論理式であっても、その表し方は一意ではない。そこで、論理式をより簡単な形に変形することを**論理式の簡単化**という。論理式を簡単化する方法として、代表的なものに

- カルノー図
- ブール代数

などがある。本講義ではブール代数について学ぶ。なお、カルノー図については第 6 回目の講義で扱う。

このような論理式を代数的に扱うための体系がブール代数である。ブール代数においても論理積 (AND) が論理和 (OR) よりも優先される。ただし、括弧のついたところは先に計算を行う。また、AND の演算子は省略できる。その他、ブール代数においても、双対性の原理が成り立つが本講義では扱わない。双対性の原理については例えば [1, p.30], [2, p.34] を参照すること。

集合 L が与えられ、その任意の要素 A, B に対し、2 種の演算 $\cdot, +$ が定義されているとすると、 $A \cdot B, A + B$ は L の要素であり、次の公理^{*1}が成立するものとする^{*2}。ただし、 $A, B, C \in L$ とする。

公理 2.1 恒等則

$$A \cdot 1 = A \quad (2.1)$$

$$A + 0 = A \quad (2.2)$$

公理 2.2 交換則もしくは可換則

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (2.3)$$

$$A + B = B + A \quad (2.4)$$

公理 2.3 結合則

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (2.5)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (2.6)$$

公理 2.4 分配則

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \quad (2.7)$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \quad (2.8)$$

公理 2.5 相補則

任意の A に対して、

$$A \cdot \bar{A} = 0 \quad (2.9)$$

および

$$A + \bar{A} = 1 \quad (2.10)$$

を満たす $\bar{A}$ が存在する。 $\bar{A}$ を補元という。

以上の公理より、以下の定理が成り立つ。

*1 公理とは、基本的な決め事 [3, p.50] である。

*2 公理系にはいくつか流儀があるが、本講義ではこの流儀を採用する。例えば、[2, 2.2.1 節] ではこの講義で紹介する公理と異なるものを公理として採用している。

定理 2.6 べき等則

$$A \cdot A = A \quad (2.11)$$

$$A + A = A \quad (2.12)$$

証明 まず, 第 1 式を証明する.

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A \cdot A + 0 && (\because \text{式(2.2)}) \\ &= A \cdot A + A \cdot \bar{A} && (\because \text{式(2.9)}) \\ &= A \cdot (A + \bar{A}) && (\because \text{式(2.7)}) \\ &= A \cdot 1 && (\because \text{式(2.10)}) \\ &= A && (\because \text{式(2.1)}) \end{aligned}$$

となる. 次に, 第 2 式は

$$\begin{aligned} A + A &= (A + A) \cdot 1 && (\because \text{式(2.1)}) \\ &= (A + A) \cdot (A + \bar{A}) && (\because \text{式(2.10)}) \\ &= A + (A \cdot \bar{A}) && (\because \text{式(2.8)}) \\ &= A + 0 && (\because \text{式(2.9)}) \\ &= A && (\because \text{式(2.2)}) \end{aligned}$$

となる. □

定理 2.7 帰無則

$$A + 1 = 1 \quad (2.13)$$

$$A \cdot 0 = 0 \quad (2.14)$$

証明 第 1 式は

$$\begin{aligned} A + 1 &= A + (A + \bar{A}) && (\because \text{式(2.10)}) \\ &= A + \bar{A} && (\because \text{式(2.6)および式(2.12)}) \\ &= 1 && (\because \text{式(2.10)}) \end{aligned}$$

より得られる. 第 2 式は

$$\begin{aligned} A \cdot 0 &= A \cdot (A \cdot \bar{A}) && (\because \text{式(2.9)}) \\ &= (A \cdot A) \cdot \bar{A} && (\because \text{式(2.5)}) \\ &= A \cdot \bar{A} && (\because \text{式(2.11)}) \\ &= 0 && (\because \text{式(2.9)}) \end{aligned}$$

から得られる. □

これまではブール代数の性質を利用して証明を行ってきたが、 A, B が 2 値変数であることを考慮すれば、真理値表を使用して証明をすることもできる。そこで、定理 2.8 と定理 2.9 は真理値表を用いて証明を行う。定理 2.8 と定理 2.9 のブール代数の性質を用いた証明はそれぞれ [2, 定理 4], [2, 定理 6] を参照すること。

定理 2.8 二重否定

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (2.15)$$

証明 真理値表を用いて示す。

表 2.1 二重否定の真理値表

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

表 2.1 より $\overline{\overline{A}} = A$ が言える。

□

定理 2.9 ド・モルガンの定理

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \quad (2.16)$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad (2.17)$$

証明 真理値表を用いて示す。

表 2.2 $\overline{A \cdot B}$ と $\overline{A} + \overline{B}$ の真理値表

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

表 2.3 $\overline{A + B}$ と $\overline{A} \cdot \overline{B}$ の真理値表

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

表 2.2 より $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ が言える。また、表 2.3 より $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ が言える。

□

定理 2.9 は 2 変数の場合であるが、3 変数以上においても同様に成り立つ。すなわち、

$$\overline{A + B + C + \cdots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdots \quad (2.18)$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \cdots \quad (2.19)$$

が成り立つ。この定理を拡張ド・モルガンの定理という。ただし、ここでは、変数の数が有限の場合のみを考える。証明のアイディアは

$$\begin{aligned} \overline{A + B + C} &= \overline{(A + B) + C} \\ &= \overline{A + B} \cdot \overline{C} \\ &= (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot \overline{C} \end{aligned}$$

$$=\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

また,

$$\begin{aligned}\overline{A \cdot B \cdot C} &= \overline{(A \cdot B) \cdot C} \\ &= \overline{A \cdot B} + \overline{C} \\ &= \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\end{aligned}$$

となる.

例題 2.10

以下の式を証明せよ.

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

証明

$$\begin{aligned}\overline{ABC} &= \overline{AB} + \overline{C} \\ &= \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\end{aligned}$$

となる. □

以下の定理の証明は絶対に試験に出題しない.

定理 2.11

A の補元はただ一つ存在する.

証明 A が異なる 2 つの補元 $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ を持つとする. このとき,

$$\begin{aligned}\overline{A}_1 &= \overline{A}_1 \cdot 1 && (\because \text{式 (2.1)}) \\ &= \overline{A}_1 (A + \overline{A}_2) && (\because \text{式 (2.10)}) \\ &= \overline{A}_1 \cdot A + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 && (\because \text{式 (2.7)}) \\ &= 0 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 && (\because \text{式 (2.9)}) \\ &= A \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 && (\because \text{式 (2.9)}) \\ &= \overline{A}_2 \cdot (A + \overline{A}_1) && (\because \text{式 (2.3) および式 (2.7)}) \\ &= \overline{A}_2 \cdot 1 && (\because \text{式 (2.10)}) \\ &= \overline{A}_2 && (\because \text{式 (2.1)})\end{aligned}$$

となる. したがって, $\overline{A}_1 = \overline{A}_2$ となり, A の補元はただ一つである. □

問題 2.12 吸収則

以下の式をブール代数の性質を用いて証明せよ.

1. $A + (A \cdot B) = A$
2. $A \cdot (A + B) = A$
3. $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
4. $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$

問題 2.12 吸収則

以下の式をブール代数の性質を用いて証明せよ.

1. $A + (A \cdot B) = A$
2. $A \cdot (A + B) = A$
3. $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$
4. $A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$

解答

1.

$$\begin{aligned} A + (A \cdot B) &= A \cdot 1 + (A \cdot B) \\ &= A(1 + B) \\ &= A \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \cdot (A + B) &= A \cdot A + A \cdot B \\ &= A + A \cdot B \\ &= A \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A \cdot (\bar{A} + B) &= A \cdot \bar{A} + A \cdot B \\ &= A \cdot B \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} A + (\bar{A} \cdot B) &= (A + \bar{A}) \cdot (A + B) \\ &= 1 \cdot (A + B) \\ &= A + B \end{aligned}$$

□

問題 2.13 出典：平成 23 年度基本情報技術者試験（FE） 特別 午前 問 1

論理式

$$\overline{(\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{C})}$$

と等しいものはどれか。ここで、 $\cdot$ は論理積、 $+$ は論理和、 $\overline{X}$ は X の否定を表す。

(ア) $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C$

(イ) $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{C}$

(ウ) $(A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + C)$

(エ) $(\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{C})$

問題 2.13 出典：平成 23 年度基本情報技術者試験（FE） 特別 午前 問 1

論理式

$$\overline{(\bar{A} + B)} \cdot (A + \bar{C})$$

と等しいものはどれか。ここで、 $\cdot$ は論理積、 $+$ は論理和、 $\bar{X}$ は X の否定を表す。

(ア) $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot C$

(イ) $\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{C}$

(ウ) $(A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + C)$

(エ) $(\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{C})$

解答

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{A} + B)} \cdot (A + \bar{C}) &= \overline{\bar{A} + B} \cdot \overline{A + \bar{C}} \\ &= \bar{\bar{A}} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{\bar{C}} \\ &= A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot C\end{aligned}$$

より、(ア) となる。

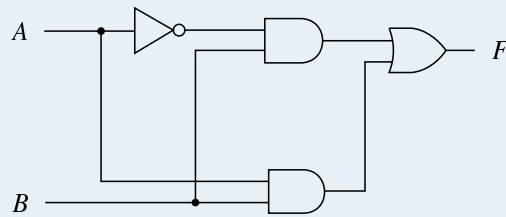
□

§3

自主学習課題

問題 3.1 出典：平成 29 年度応用情報技術者試験（AP） 春期 午前 問 23

図の回路が実現する論理式はどれか。ここで、論理式中の“ $\cdot$ ”は論理積、“ $+$ ”は論理和を表す。



(ア) $F = A$

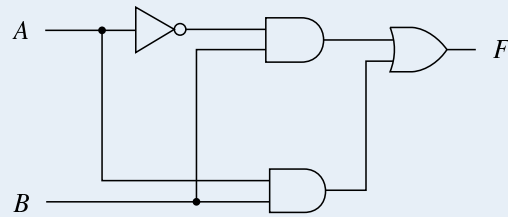
(イ) $F = B$

(ウ) $F = A \cdot B$

(エ) $F = A + B$

問題 3.1 出典：平成 29 年度応用情報技術者試験（AP） 春期 午前 問 23

図の回路が実現する論理式はどれか。ここで、論理式中の“ $\cdot$ ”は論理積、“ $+$ ”は論理和を表す。



- (ア) $F = A$
- (イ) $F = B$
- (ウ) $F = A \cdot B$
- (エ) $F = A + B$

解答

回路図より、 $F = \overline{A} \cdot B + A \cdot B$ となる。したがって、

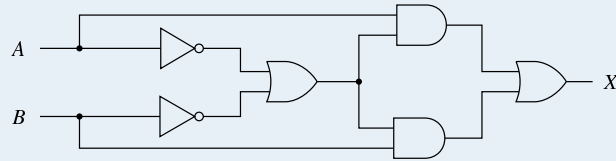
$$\begin{aligned}
 F &= \overline{A} \cdot B + A \cdot B \\
 &= B(\overline{A} + A) \\
 &= B \cdot 1 \\
 &= B
 \end{aligned}$$

となる。したがって、(イ)。

□

問題 3.2 出典：平成 29 年度基本情報技術者試験（FE） 秋期 午前 問 23

図に示すデジタル回路と等価な論理式はどれか。ここで、論理式中の “ $\cdot$ ” は論理積、“ $+$ ” は論理和、 $\overline{X}$ は X の否定を表す。



(ア) $X = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

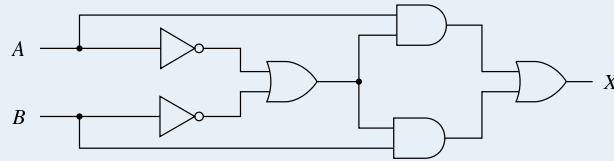
(イ) $X = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

(ウ) $X = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

(エ) $X = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$

問題 3.2 出典：平成 29 年度基本情報技術者試験（FE） 秋期 午前 問 23

図に示すデジタル回路と等価な論理式はどれか。ここで，論理式中の “ $\cdot$ ” は論理積，“ $+$ ” は論理和， $\overline{X}$ は X の否定を表す。



- (ア) $X = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
 (イ) $X = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
 (ウ) $X = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
 (エ) $X = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$

解答

回路図より， $X = A \cdot (\overline{A} + \overline{B}) + B \cdot (\overline{A} + \overline{B})$ が得られる．したがって，

$$\begin{aligned} X &= A \cdot (\overline{A} + \overline{B}) + B \cdot (\overline{A} + \overline{B}) \\ &= A \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + B \cdot \overline{B} \\ &= A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \end{aligned}$$

より，(ウ) となる。

□

参考文献

- [1] 浜辺 隆二，論理回路入門（第 4 版），森北出版，2021，ISBN 978-4-627-82364-8.
 [2] 藤井 信生，ディジタル電子回路（第 2 版）—集積回路化時代の一，オーム社，2020，ISBN 978-4-274-22496-6.
 [3] 安井 浩之，木村 誠聡，辻 裕之，基本を学ぶ コンピュータ概論（改訂 2 版），オーム社，2019，ISBN 978-4-274-22468-3.