

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也 松下慎也 徐粒

秋田県立大学大学院システム科学技術研究科
電子情報システム学専攻

2018 年 12 月 19 日

発表の流れ

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

- 1 背景
- 2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法
- 3 制約可能性問題への定式化
- 4 数値実験
- 5 結論

目次

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 制約可能性問題への定式化

4 数値実験

5 結論

- 非凸集合と凸集合の共通部分を見つける問題 (非凸制約可能性問題) について考える
- 工学における様々な問題を表現できる [2, 3]
- 本研究では以下の問題を考える：

Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem(SNIEP)

与えられた固有値のリストを $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とした際, 固有値 λ を持つ対称非負 $n \times n$ 行列を決定する問題

- P. D. Egleston, T. D. Lenker, and S. K. Narayan, The nonnegative inverse eigenvalue problem, Linear Algebra Appl., 379 (2004), pp. 475-490.
- A. Berman and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, New York, 1979. Also published as Classics in Appl. Math. 9, SIAM, Philadelphia, 1994.

目的

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

- 先行研究：SNIEP を制約可能性問題に定式化し，射影法を適用 [2]
 - 数値実験のみで有効性を検証
- Li-Pong によって制約集合が非凸集合になる場合についての Douglas-Rachford の分割法が提案されている [1]
 - 具体的な問題へ適用していない

目的

制約可能性問題に定式化された SNIEP について文献 [1] で提案されている Douglas-Rachford の分割法を適用し，その有用性を検証する．

目次

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 制約可能性問題への定式化

4 数値実験

5 結論

制約可能性問題

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

■ C : 閉凸集合

■ D : 閉集合

制約可能性問題

集合 C, D の共通部分 $C \cap D$ の点を見つける問題

$$\text{Find } u \in C \cap D \quad (1)$$

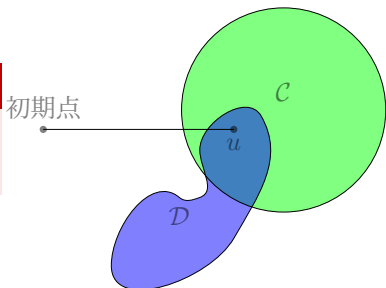


Figure 1: 制約可能性問題のイメージ図

制約可能性問題

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

問題 (1) を解決するため, 文献 [1] では以下の最小化問題を検討

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{1}{2} \|u - P_{\mathcal{C}}(u)\|^2 \\ & \text{subject to} && u \in \mathcal{D} \end{aligned} \tag{2}$$

- 集合 $\mathcal{D}$ が凸集合 $\Rightarrow$ 問題 (1) と問題 (2) は等価

射影

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

Definition (射影)

- $\mathcal{H}$: Hilbert 空間
- $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$: 空でない閉凸集合
- $x : \mathcal{H}$ の任意の要素

$$\|x - P_{\mathcal{C}}(x)\| = \min_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\| \quad (3)$$

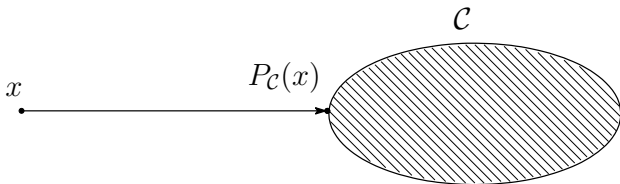


Figure 2: 射影のイメージ図 (閉凸集合)

射影

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

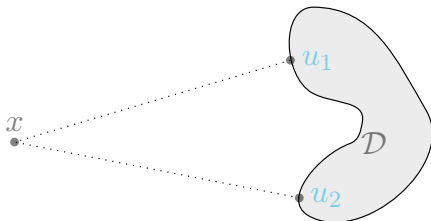
背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論



$$\|x - u_1\| = \|x - u_2\| \Rightarrow P_{\mathcal{D}}(x) = \{u_1, u_2\}$$

Definition (射影)

■ $\mathcal{D}$: 閉集合

$$P_{\mathcal{D}}(x) = \left\{ z \in \mathcal{D} \mid \|x - z\| = \min_{y \in \mathcal{D}} \|x - y\| \right\} \quad (4)$$

Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

Assumption $P_{\mathcal{D}}$ が計算可能

Douglas-Rachford の分割法 [1]

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Id + (2P_{\mathcal{D}} - Id) \circ \left(\frac{2}{1+\gamma} (Id + \gamma P_{\mathcal{C}}) - Id \right) \right) (x_n) \quad (5)$$

- Id : 恒等写像
- $\gamma \in \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$: ステップサイズ
- $P_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{D}}$: 集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対する射影

Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

定理 [1, Theorem 5]

- $\mathcal{C}$: 閉凸集合, $\mathcal{D}$: 閉集合
- $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ のどちらかがコンパクト集合
- $\gamma \in \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$

$\left\{ \frac{1}{1+\gamma}(x_n + \gamma P_{\mathcal{C}}(x_n)) \right\}$ の収積点が問題 (2) の停留点に収束

- u : 停留点 $\Leftrightarrow 0 \in (I - P_{\mathcal{C}})(u) + \partial i_{\mathcal{D}}(u)$

目次

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 制約可能性問題への定式化

4 数値実験

5 結論

Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem(SNIEP)

与えられた固有値のリストを $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とした際, 固有値 λ を持つ対称非負 $n \times n$ 行列を決定する問題

- $\mathbb{S}^n$: サイズが n の実対称行列からなる集合
- $\|\cdot\|_F$: Frobenius ノルム

$$\|A\|_F := \sqrt{\text{trace}(A^T A)} \quad (6)$$

制約可能性問題への定式化 [2]

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

- $\mathcal{C}$: 対称非負行列からなる集合 (閉凸集合)

$$\mathcal{C} = \{ A \in \mathbb{S}^n \mid A_{ij} \geq 0 \text{ for all } i, j \} \quad (7)$$

- $\lambda = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$: 与えられた固有値のリスト
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\mathcal{D}$: 固有値 λ を持つ実対称行列からなる集合 (非凸コンパクト集合)

$$\mathcal{D} = \left\{ A \in \mathbb{S}^n \mid \exists V : \text{直交行列 s.t. } A = V \Lambda V^T \right\} \quad (8)$$

SNIEP は以下と等価

$$\text{Find } X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad (9)$$

集合 C への射影

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

Definition (集合 C への射影)

$A \in \mathbb{S}^n$ としたとき, 集合 C への射影 $P_C(A)$ は以下で定義される.

$$(P_C(A))_{ij} = \max \{ A_{ij}, 0 \} \quad \text{for all } 1 \leq i, j \leq n \quad (10)$$

- 集合 C への射影として P_C を用いる.

集合 $\mathcal{D}$ への射影

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

$A \in \mathbb{S}^n$ は固有値分解によって $A = VTV^T$ と表現できる.

- V : 直交行列
- T : 対角行列

Definition (集合 $\mathcal{D}$ への射影)

$A \in \mathbb{S}^n, A = V \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) V^T, \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ としたとき, $\mathcal{D}$ への射影を以下で定義する.

$$P_{\mathcal{D}}(A) = V \Lambda V^T \quad (11)$$

- 集合 $\mathcal{D}$ への射影として $P_{\mathcal{D}}$ を用いる.

目次

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 制約可能性問題への定式化

4 数値実験

5 結論

数値実験概要

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

今回扱う問題

固有値 $\lambda = \{3 - t, 1 + t, -1, -1, -1, -1\}$ ($0 < t < 1$) を持つ対称非負行列を求める問題

- 既存のアルゴリズム (射影法) と文献 [1] で提案されているアルゴリズム (DR 法) を適用
- アルゴリズムの評価基準：% solved, 繰り返し回数
 - 繰り返し回数：解が求められた際の平均値
- 初期点 X ：各成分が区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従うように生成
- 実験回数：1000 回
- 繰り返しの上限：5000 回

数値実験概要

■ 終了条件

■ 射影法： $\|x_n - y_n\|_F < 10^{-7}$

■ DR 法：

$$\frac{\max \{ \|x_n - x_{n-1}\|_F, \|y_n - y_{n-1}\|_F, \|z_n - z_{n-1}\|_F \}}{\max \{ \|x_{n-1}\|_F, \|y_{n-1}\|_F, \|z_{n-1}\|_F, 1 \}} < 10^{-7} \quad (12)$$

計算環境

OS macOS Mojave

メモリ 8GB

CPU 1.8 GHz Intel Core i5

使用ソフト MATLAB R2017a

数値実験

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

Table 1: 数値実験の結果

t	繰り返し回数		%solved		時間 [s]	
	射影法	DR 法	射影法	DR 法	射影法	DR 法
0.25	273.00	389.08	99.5	100	0.0081861	0.01716
0.50	302.30	399.60	96.2	100	0.0081687	0.01590
0.75	164.52	415.77	61.6	100	0.0046572	0.01707
0.95	144.82	418.66	49.4	99.6	0.0040623	0.01735

- DR 法が解に到達する割合が高いことがわかる.

目次

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 制約可能性問題への定式化

4 数値実験

5 結論

結論

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

結論

- 既存のアルゴリズムである射影法よりも高い割合で解を求めることができた
- 理論的な保障では $\left\{ \frac{1}{1+\gamma}(x_n + \gamma P_C(x_n)) \right\}$ の収積点の問題 (2) の停留点に収束することであったが今回の問題では、問題 (2) の解になっていることを確認できた

今後の課題

- 文献 [3] などの制約可能性問題に対して Douglas-Rachford の分割法を適用

参考文献

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

小野寺優希也, 松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

制約可能性問題への定式化

数値実験

結論

- [1] G. LI AND T. K. PONG, *Douglas-Rachford splitting for nonconvex optimization with application to nonconvex feasibility problems*, Math. Program., 159(1) (2016), pp. 371–401.
- [2] R. ORSI, *Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems for nonnegative matrices*, SIAM J. Matrix Anal., 28(1) (2006), pp. 190–212.
- [3] K. YANG AND R. ORSI, *Generalized pole placement via static output feedback: a methodology based on projections.*, Automatica, 42(12) (2006).