

制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法に関する研究

秋田県立大学大学院システム科学技術研究科電子情報システム学専攻 1 年

M20B007 小野寺優希也

指導教員：松下慎也 准教授

1 背景

本研究では、非凸集合と凸集合の共通部分を見つける問題 (非凸制約可能性問題) について考える。この問題は、工学における様々な問題を表現できる [2, 3]。ここでは、 $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ としたときに、固有値 λ を持つ対称非負 $n \times n$ 行列を決定する問題 (SNIEP) を考える。先行研究では、SNIEP を制約可能性問題に定式化し、射影法を適用することで問題の解を求めている [2]。

また、文献 [2] の定式化では制約集合が非凸集合になるが、近年、Li-Pong によって、制約集合が非凸集合になる場合についての Douglas-Rachford の分割法が提案されている [1]。

2 目的

本研究では、制約可能性問題に定式化された SNIEP について文献 [1] で提案されている Douglas-Rachford の分割法を適用し、その有用性を検証する。

3 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

集合 $\mathcal{C}$ を閉凸集合、集合 $\mathcal{D}$ を閉集合とした際、制約可能性問題は

$$\text{Find } u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad (1)$$

と表すことができる。

文献 [1] では問題 (1) を解決するために以下の最小化問題を検討している。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{1}{2} \|u - P_{\mathcal{C}}(u)\|^2 \\ & \text{subject to} && u \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (2)$$

集合 $\mathcal{D}$ が凸集合のとき、問題 (1) と問題 (2) は等価であることが知られている。このとき、Douglas-Rachford の分割法を

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Id + (2P_{\mathcal{D}} - Id) \circ \left(\frac{2}{1+\gamma} (Id + \gamma P_{\mathcal{C}}) - Id \right) \right) (x_n) \quad (3)$$

として適用している。ここで Id は恒等写像、 $P_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{D}}$ はそれぞれ集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ への射影、 γ は $0 < \gamma < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ を満たすステップサイズである。このとき、集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ のどちらかがコンパクト集合であるとき、 $\{(x_n + \gamma P_{\mathcal{C}}(x_n)) / (1 + \gamma)\}$ の収積点が問題 (2) の停留点に収束することが知られている [1]。

4 SNIEP の制約可能性問題への定式化

この節以降では、サイズが n の実対称行列からなる集合 $\mathbb{S}^n$ で考え、ノルムは Frobenius ノルム $\|\cdot\|_F$ を使用する。対称非負行列からなる集合を

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathbb{S}^n \mid A_{ij} \geq 0 \text{ for all } i, j\} \quad (4)$$

と表す。また、次のような $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を考え、 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1), \dots, \lambda_n$ とする。固有値 λ を持つ実対称行列からなる集合を

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathbb{S}^n \mid \exists V : \text{直交行列 s.t. } A = V\Lambda V^T\} \quad (5)$$

と表すと SNIEP は以下の問題と等価になる [2]。

$$\text{Find } X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}. \quad (6)$$

このとき、 $\mathcal{C}$ は閉凸集合、 $\mathcal{D}$ は非凸コンパクト集合となる。また、集合 $\mathcal{C}$ への射影 $P_{\mathcal{C}}(A)$ は $P_{\mathcal{C}}(A)_{ij} = \max\{A_{ij}, 0\}$ ($\forall i, j \leq n$) で与えられる。 $A \in \mathbb{S}^n, A = V\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)V^T, \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ としたとき、集合 $\mathcal{D}$ への射影 $P_{\mathcal{D}}(A)$ は $P_{\mathcal{D}}(A) = V\Lambda V^T$ で与えられる。

5 数値実験

固有値 $\lambda = \{3-t, 1+t, -1, -1, -1, -1\}$ ($0 < t < 1$) を持つ対称非負行列を求める問題に対して既存のアルゴリズム (射影法) と文献 [1] で提案されているアルゴリズム (DR 法) を適用した結果を比較する。初期値 X の各成分は区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従っている。実験回数は 1000 回で、繰り返しの上限は 5000 回としている。また、アルゴリズムの終了条件は、射影法は $\|x^n - y^n\|_F < 10^{-7}$ 、DR 法は、以下の式 (7) としている。

$$\frac{\max\{\|x_n - x_{n-1}\|_F, \|y_n - y_{n-1}\|_F, \|z_n - z_{n-1}\|_F\}}{\max\{\|x_{n-1}\|_F, \|y_{n-1}\|_F, \|z_{n-1}\|_F, 1\}} < 10^{-7}. \quad (7)$$

数値実験の結果を表 1 に示す。表 1 より、DR 法が解に到達する割合が高いことがわかる。

表 1 数値実験の結果

t	繰り返し回数		%solved	
	射影法	DR 法	射影法	DR 法
0.25	273.00	389.08	99.5	100
0.50	302.30	399.60	96.2	100
0.75	164.52	415.77	61.6	100
0.95	144.82	418.66	49.4	99.6

6 結論

非凸制約可能性問題に対して、理論的な保障がされている Douglas-Rachford の分割法を適用した。その結果、既存のアルゴリズムよりも高い割合で解を求めることができた。

今後の課題は、文献 [3] のような制約可能性問題に定式化されている他の問題にも Douglas-Rachford の分割法を適用し、その有用性を検証していくことである。

参考文献

- [1] G. P. LI AND T. K. PONG, *Douglas-Rachford splitting for nonconvex optimization with application to nonconvex feasibility problems*, Math. Program., 159(1) (2016), pp. 371–401.
- [2] R. ORSI, *Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems for nonnegative matrices*, SIAM J. Matrix Anal., 28(1) (2006), pp. 190–212.
- [3] K. YANG AND R. ORSI, *Generalized pole placement via static output feedback: a methodology based on projections.*, Automatica, 42(12) (2006).