

制御設計問題に対する Douglas-Rachford の 分割法の応用

小野寺優希也 松下慎也 徐粒

秋田県立大学大学院システム科学技術研究科
電子情報システム学専攻

2018 年 7 月 19 日

発表の流れ

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 一般的な非対称問題

4 数値実験

5 結論

目次

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 一般的な非対称問題

4 数値実験

5 結論

静的出力フィードバック安定化問題

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- 線形時不変システム：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ (状態ベクトル), $u \in \mathbb{R}^m$ (入力ベクトル),
 $y \in \mathbb{R}^p$ (出力ベクトル)

静的出力フィードバック安定化問題 (問題 1)

静的出力フィードバック制御則

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}\tag{2}$$

を見つける問題.

- K : 閉ループシステム行列 $A + BKC$ の固有値の実部が
負となるような定数行列

背景

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- A, K が対称行列 $\Rightarrow$ 凸最小化問題 $\Rightarrow$ 最適化法 (内点法)
- A, K が非対称行列 $\Rightarrow$ 最適化法が適用できない
- 問題 1 を制約可能性問題に定式化し, 数値実験を行なっている [9]

目的

制約可能性問題に定式化した問題 1 に対して Douglas-Rachford の分割法を適用し, その有用性を検証する.

[9] K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore: A projective algorithm for static output feedback stabilization

目次

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 一般的な非対称問題

4 数値実験

5 結論

制約可能性問題

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

■ $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: 制約集合

制約可能性問題

集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の共通部分 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ の点
を見つける問題

$$\text{Find } u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad (3)$$

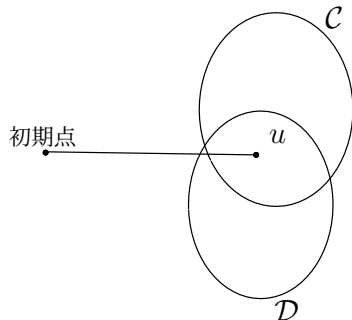


Figure 1: 制約可能性問題のイメージ図

Douglas-Rachford の分割法

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

Douglas-Rachford の分割法

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(Id + R_{\mathcal{D}}R_{\mathcal{C}})(x_n) (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

- Id : 恒等写像
- $P_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{D}}$: 集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対する射影 (概要 p2 の脚注を参照)
- $R_{\mathcal{C}} = 2P_{\mathcal{C}} - Id, R_{\mathcal{D}} = 2P_{\mathcal{D}} - Id$

- $\{P_{\mathcal{C}}(x_n)\}$ が $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ のある点 u に収束 [1][6]
- 射影法よりも一般的には収束が速いことが知られている

[1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes: Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces

[6] P. L. Lions and B. Mercier: Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators

Douglas-Rachford の分割法

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

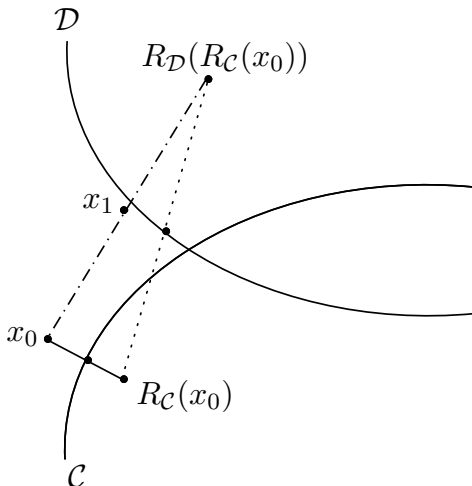


Figure 2: Douglas-Rachford の分割法の幾何学的な説明

目次

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 一般的な非対称問題

4 数値実験

5 結論

静的出力フィードバック安定化問題

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- 線形時不変システム：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{5}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ (状態ベクトル), $u \in \mathbb{R}^m$ (入力ベクトル),
 $y \in \mathbb{R}^p$ (出力ベクトル)

静的出力フィードバック安定化問題 (問題 1)

静的出力フィードバック制御則

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}\tag{6}$$

を見つける問題.

- K ：閉ループシステム行列 $A + BKC$ の固有値の実部が
負となるような定数行列

制約可能性問題への定式化

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- $\mathcal{L}$: 閉ループシステム行列からなる集合

$$\mathcal{L} = \left\{ Z \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists K \in \mathbb{R}^{m \times p} \text{ s.t. } Z = A + BKC \right\} \quad (7)$$

- $\mathcal{M}$: 左半平面に固有値をもつ行列の集合

$$\mathcal{M} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \rho(Z) \leq 0 \right\} \quad (8)$$

問題 1 は以下と等価^[9] :

$$\text{Find } X \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M} \quad (9)$$

^[9] K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore: A projective algorithm for static output feedback stabilization

一般的な非対称問題

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

$X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ は Schur 分解によって $X = VTV^T$ と表現できる.

- V : ユニタリ行列
- T : 上三角行列

定義 ($\mathcal{M}$ への射影 [9])

$X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ に対して, $\mathcal{M}$ への射影を以下で定義する

$$P_{\mathcal{M}}(V, T) := V\bar{T}V^T \quad (10)$$

$$\bar{T}_{kl} = \begin{cases} \min\{0, \operatorname{Re}(T_{kk})\} + i\operatorname{Im}(T_{kk}) & (k = l) \\ T_{kl} & (k \neq l) \end{cases} \quad (11)$$

- $\mathcal{M}$ への射影として, $P_{\mathcal{M}}(V, T)$ を用いる.

[9] K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore: A projective algorithm for static output feedback stabilization, Definition 7.

一般的な非対称問題

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

定義 ($\mathcal{L}$ への射影 ^[9])

$X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ に対して $\mathcal{L}$ への射影を以下で定義する

$$P_{\mathcal{L}}(X) := A + BKC. \quad (12)$$

- K : 以下の最小化問題の解

$$\arg \min_{K \in \mathbb{R}^{m \times p}} \|(C^T \otimes B) \text{vec}(K) - \text{vec}(\text{Re}(x) - A)\|_2 \quad (13)$$

- $\|\cdot\|_2$: Euclidean ノルム
- $\arg \min f(x) : f(x)$ を最小にする x の集合
- $\mathcal{L}$ への射影として問題 (13) の解を用いる
- 問題 (13) は MATLAB を用いて容易に解くことができる

[9] K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore: A projective algorithm for static output feedback stabilization, Lemma 10

目次

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 一般的な非対称問題

4 数値実験

5 結論

数値実験概要

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

実験 1 ランダムに A, B, C を生成した問題

- システムの次元: $n = 6, m = 4, p = 3$ ^[4]
- A, B, C : 各成分が平均 0, 分散 1 の正規分布に従うように生成

実験 2 文献^[5] に示されている問題

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -0.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

^[4] Kimura H.: Pole assignment by gain output feedback

^[5] Keel L. H., S. P. Bhattacharyya and J. W. Howze: Robust control with astructured perturbation

数値実験概要

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- 終了条件： $\rho(Y) \leq 0$
- アルゴリズムの評価基準：成功した割合，繰り返し回数
 - 繰り返し回数：解が求められた際の平均値
- 初期値 Y ：各成分が平均 0, 分散 1 の正規分布に従うように生成
- 実験回数：1000 回
- 繰り返しの上限：1000 回

計算環境

OS macOS High Sierra

メモリ 8GB

CPU 1.8 GHz Intel Core i5

使用ソフト MATLAB R2017a

数値実験

ランダムに A, B, C を生成した問題 (実験 1)

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

Table 1: ランダムに A, B, C を生成した問題の実験結果

	成功確率	繰り返し回数	時間 [s]
DR 法	100	156.04	0.012169
射影法	44.8	121.60	0.016759

- 射影法は計算効率を上げるための前処理を行なっている
- 成功確率：DR 法が 2 倍程度高い
- 繰り返し回数：射影法の方が 20 回程少ない

数値実験

文献 [5] に示されている問題 (実験 2)

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

Table 2: 文献 [5] に示されている問題の実験結果

	成功確率	繰り返し回数	時間 [s]
DR 法	100	13.184	0.000964
射影法	70.3	467.33	0.020097

- 射影法は計算効率を上げるための前処理を行なっている
- 繰り返し回数：DR 法の方が 1/35 倍程度少ない
- 成功確率：DR 法の方が 30% 程度高い

数値実験

実験 2 の解の検証

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- 繰り返し回数：9 回
- 計算時間：0.001846 s
- フィードバック制御則 K ：

$$K = \begin{bmatrix} 1.0056 & 3.9172 \end{bmatrix}^T$$

- $A + BKC$ の固有値： $\{-27, -0.1815, -0.95 \pm i0.5333\}$

目次

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

1 背景

2 制約可能性問題と Douglas-Rachford の分割法

3 一般的な非対称問題

4 数値実験

5 結論

結論

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

結論

- 制約可能性問題に定式化した問題 1 に対して, Douglas-Rachford の分割法を適用し, その有用性を検証した.
- 先行研究で提案されていたアルゴリズムよりも高い確率で解に収束することを確認できた.

今後の課題

- 制約集合が非凸集合の場合に対する大域的な収束の理論的な保証

参考文献 I

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- [1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes: Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, 366/370, Springer(2011)
- [2] K. M. Grigoriadis, A. E. Frazho and R. E. Skelton: Application of alternating convex projection methods for computation of positive toeplitz matrices, IEEE Transaction on signal processing, **42**-7, 1873/1875 (1994)
- [3] H. Hu, and I. Olkin: Numerical procedure for finding the positive definite matrix closest to a patterned matrix, Statist. Probab. Lett. **12**-6, 511/515 (1991)
- [4] Kimura H.: Pole assignment by gain output feedback, IEEE Trans. Automat. Control, **20**, 509/516 (1975)

参考文献 II

- [5] Keel L. H., S. P. Bhattacharyya and J. W. Howze: Robust control with a structured perturbation, IEEE Trans. Automat. Control, **33**(1), 68/78 (1988)
- [6] P. L. Lions and B. Mercier: Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators, SIAM J. Numer. Anal., **16**, 964/979 (1979)
- [7] R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis: A unified algebraic approach to linear control design, 189/204, CRC Press (1998)
- [8] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis: Static output feedback — a survey, Automatica **33**-2, 125/137 (1997)

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

参考文献 III

制御設計問題
に対する
Douglas-
Rachford の
分割法の応用

小野寺優希也,
松下慎也, 徐粒

背景

制約可能性問
題と Douglas-
Rachford の分
割法

一般的な非対
称問題

数値実験

結論

- [9] K. Yang, R. Orsi and J. B. Moore: A projective algorithm for static output feedback stabilization, In Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control, 263/268 (2004)