

最良近似問題とその解法について

小野寺優希也 松下慎也 徐粒

秋田県立大学 システム科学技術学部 電子情報システム学科 4 年

December 13, 2017

発表の流れ

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

1 背景

2 目的

3 最良近似問題

4 制約集合と射影

5 数値実験

6 まとめと課題

背景

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

- 制御工学において、線形離散時間コンローラの設計問題は与えられた行列から最も近い複数の制約条件を満たす行列を求める問題に定式化されることが知られている ([2] 参照).
- 最良近似問題は制約可能性問題¹の1つであり、線形計画問題の双対問題は最良近似問題になることが知られている ([3] 参照).
- Dykstra 法は最良近似問題の解に収束することを理論的に保証されているものの、収束の評価が理論的に保証されていないことや収束が遅いという問題点がある.

¹制約可能性問題とは複数の集合の共通部分を求める問題のことである.

目的

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

- これまでに研究されている最良近似問題を具体的に検証することを目的とする
- 最良近似問題を Dykstra 法と射影法を用いて解を求め、アルゴリズムの比較を行う

最良近似問題

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

以下の問題を考える.

- C, D : 閉凸集合
- u : 与えられた点

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|u - x\| \\ \text{subject to} & x \in C \cap D \end{array}$$

上記のように与えられた点から最も近い集合の共通部分の点を見つける問題を**最良近似問題**という.

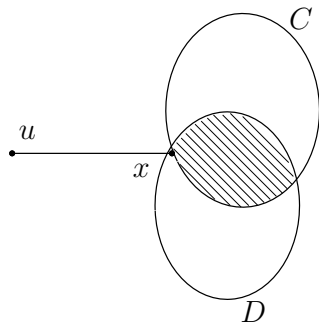


Figure 1: 最良近似問題のイメージ図

最良近似問題

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

本研究では、文献 [1] で考えられている特定の制約条件を満たす最も近い正定値 Toeplitz 行列を求める問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|T_0 - T\|_F \\ \text{subject to} & T \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \end{array} \quad (1)$$

- $\mathcal{H}$: n 次対称行列からなる集合 (実 Hilbert 空間となる)
- $T_0 \in \mathcal{H}$: 特定の行列, 初期点
- $\mathcal{C}_i (i = 1, 2, 3) \subset \mathcal{H}$: 閉凸集合
- $\|\cdot\|_F$: Frobenius ノルム

$$\|A\|_F := \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$$

Toeplitz 行列

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

Definition (Toeplitz 行列)

行列 T が Toeplitz 行列であるとは T の (i, j) 成分が任意の i, j に対して $t_{ij} = t_{i+1, j+1}$ となる行列のことである。

Example

Toeplitz 行列とは式 (2) のように右斜めに同じ成分が並ぶ行列のこと。

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

行列 T の (i, j) 成分を t_{ij} とすると,

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{22} = t_{33} = a, & t_{12} &= t_{23} = b, \\ t_{13} &= c, & t_{21} &= t_{32} = d, & t_{31} &= e. \end{aligned}$$

射影

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

Definition (射影)

C を $\mathcal{H}$ の空でない閉凸集合, $\mathcal{H}$ の任意の要素を x とする. 射影 $P_C(x)$ とは

$$\|x - P_C(x)\| = \min_{x_0 \in C} \|x - x_0\| \quad (3)$$

を満たす写像のことをいう ([4], [5] 参照).

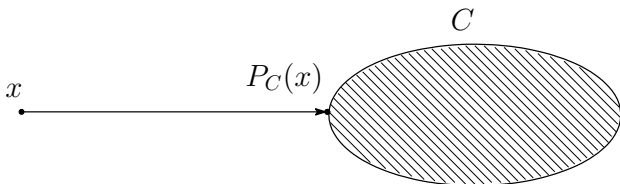


Figure 2: 射影のイメージ図

制約条件 $\mathcal{C}_1$ とその射影

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

制約条件 $\mathcal{C}_1$ とその射影

制約条件 $\mathcal{C}_1$ とその射影 $P_1(A)$ は

$$\mathcal{C}_1 = \{ T \in \mathcal{H} \mid T \text{ は Toeplitz 行列} \} \quad (4)$$

$$P_1(A) = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_0 \end{bmatrix} \quad (A \in \mathcal{H}) \quad (5)$$

となる. $A = (a_{ij})$ とし, $P_1(A)$ の成分を $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ とする時, $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ は以下のように計算される.

$$t_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad t_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii+1},$$
$$t_2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} a_{ii+2}, \quad \dots, \quad t_{n-1} = a_{1n}.$$

$P_1(A)$ の例

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

Example

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ とした時, $P_1(A) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$ となる.
ここで,

$$a_0 = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}),$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 a_{ii+1} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{23}),$$

$$a_2 = a_{13}$$

となる.

制約条件 $\mathcal{C}_2$ とその射影

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

制約条件 $\mathcal{C}_2$ とその射影

制約条件 $\mathcal{C}_2$ とその射影 $P_2(A)$ は

$$\mathcal{C}_2 = \{ T \in \mathcal{H} \mid T \succeq Q \} \quad (6)$$

$$P_2(A) = U \Lambda_+ U^T + Q \quad (A \in \mathcal{H}) \quad (7)$$

となる．ここで，

- $Q : \mathcal{H}$ の特定の行列
- $U \Lambda U^T : A - Q$ の固有値分解
- $\Lambda_+ : A - Q$ の固有値からなる対角行列の負の固有値を 0 で置換した行列

である．

制約条件 $\mathcal{C}_3$ とその射影

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

制約条件 $\mathcal{C}_3$ とその射影 $P_3(A)$

制約条件 $\mathcal{C}_3$ とその射影 $P_3(A)$ は

$$\mathcal{C}_3 = \{ T \in \mathcal{H} \mid \mathbf{r}_3 T \mathbf{r}_3^T \leq \gamma_3 \} \quad (8)$$

$$P_3(A) = \begin{cases} A & (\mathbf{r}_3 T \mathbf{r}_3^T \leq \gamma_3) \\ \frac{\gamma_3 - \mathbf{r}_3 A \mathbf{r}_3^T}{\|\mathbf{r}_3\|^4} + A & (\mathbf{r}_3 T \mathbf{r}_3^T > \gamma_3) \end{cases} \quad (9)$$

となる．ここで，

- $\mathbf{r}_3$: 特定の行ベクトル
- γ_3 : 特定の正数

である．

射影法

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

射影法の点列は式 (10) で与えられる.

$$\boxed{x_{k+1} = P_D(P_C(x_k))} \quad (10)$$

今回, 制約集合が3つ存在するため, 初期点を A_0 とすると,

$$A_1 = P_1(A_0)$$

$$A_2 = P_2(A_1)$$

$$A_3 = P_3(A_2)$$

$\vdots$

のように点列を生成する.

- 射影法は制約可能性問題に適用される

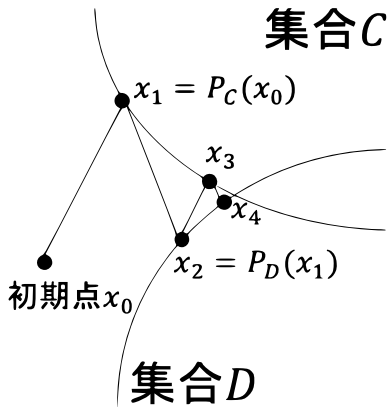


Figure 3: 射影法のイメージ図

Dykstra 法

Dykstra 法のアルゴリズムは以下の式で表される.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= P_1(x_0), & z_1 &= x_1 - x_0 \\ x_2 &= P_2(x_1), & z_2 &= x_2 - x_1 \\ x_3 &= P_3(x_2), & z_3 &= x_3 - x_2 \end{aligned} \right\} \text{1st cycle}$$

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= P_1(x_3 - z_1), & z_4 &= z_1 + x_4 - x_3 \\ x_5 &= P_2(x_4 - z_2), & z_5 &= z_2 + x_5 - x_4 \\ x_6 &= P_3(x_5 - z_3), & z_6 &= z_3 + x_6 - x_5 \end{aligned} \right\} \text{2st cycle}$$

$$\begin{aligned} x_7 &= P_1(x_6 - z_4), & z_7 &= z_4 + x_7 - x_6 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

- Dykstra 法は最良近似問題に適用できる

数値実験

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

- $Q = 0.1I, \gamma_3 = 1$ とし, Dykstra 法と射影法で解を求める
- 初期点である A は乱数を発生させて対称行列を作成したものを用いた
- 射影法を最良近似問題に適用するために, C_4 の制約集合を追加した

計算環境

OS macOS High Sierra

メモリ 8GB

CPU 1.8 GHz Intel Core i5

使用ソフト MATLAB R2017a

数値実験

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

実験を 100 回行い，収束するまでの時間と繰り返し回数の平均を取ったものを表 1 に示す．

Table 1: 数値実験の結果

	Dykstra 法		射影法	
TOL	時間	回数	時間	回数
10^{-3}	8.14×10^{-5}	19.14	4.41×10^{-5}	5.04
10^{-5}	8.05×10^{-5}	60.16	4.34×10^{-5}	8.85
10^{-10}	7.61×10^{-5}	123.33	4.62×10^{-5}	17.89

表 1 より Dykstra 法の方が繰り返し回数が多いことがわかる．

まとめと課題

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

- 最良近似問題を正定値 Toeplitz 行列を求める問題として捉え、Dykstra 法と射影法を用いて解を比較することができた
- 射影法の方が繰り返し回数が少ないが問題の解がわかっているときでないと適用できないため、実用的ではない
- Dykstra 法を修正したり、新たなアルゴリズムを適用したりして、より良いアルゴリズムを見つける
- 正定値 Toeplitz 行列を求めることが工学において、どのような意義があり、どのような応用先があるかを理解する

参考文献

最良近似問題
とその解法に
ついて

小野寺優希也
松下慎也
徐粒

背景

目的

最良近似問題

制約集合と
射影

数値実験

まとめと課題

- [1] K. M. Grigoriadis, A. E. Frazho, and R. E. Skelton, *Application of Alternating Convex Projection Methods for Computation of Positive Toeplitz Matrices*, IEEE Transactions on Signal Processing, (1994), 1873-1875.
- [2] K. M. Grigoriadis, R. E. Skelton, *Alternating Convex Projection Methods for Discrete-Time Covariance Control Design*, Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 88, No.2, (1996), 399-432.
- [3] Matthew Tam, *The Method of Alternating Projections*, University of Newcastle, 2012, Ph.D.thesis.
- [4] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.
- [5] 山田功, 工学のための関数解析, 数理工学社, 2009.