

最良近似問題とその解法について

秋田県立大学システム科学技術学部 電子情報システム学科 4 年

B16B027 小野寺優希也

指導教員：松下 慎也 准教授

1 背景

制御工学では、線形離散時間コンローラの設計問題は与えられた行列から最も近い複数の制約条件を満たす行列を求める問題に定式化されることが知られている ([2]). また、最良近似問題は制約可能性問題の 1 つであり、線形計画問題の双対問題は最良近似問題になることが知られている ([3]).

また、最良近似問題に適用される Dykstra 法は最良近似問題の解に収束することを理論的に保証されているものの、収束の速さの評価が理論的に保証されていないことや収束が遅いという問題点がある。

2 目的

本研究ではこれまでに研究されている最良近似問題を具体的に検証することを目的とし、アルゴリズムの比較を行う。

3 最良近似問題

最良近似問題とは、与えられた点から最も近い集合の共通部分の点を見つける問題である。本研究では以下の条件を満たす点を求めることを考える。

$$\min \|T_0 - T\|_F \text{ subject to } T \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \quad (1)$$

ここで、 T_0 は n 次対称行列からなる実 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の特定の行列であり、 $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, 3$) は $\mathcal{H}$ の閉凸部分集合、 $\|\cdot\|_F$ は Frobenius ノルムである。

4 制約集合と射影

ここでは文献 [1] で考えられている問題を扱う。文献 [1] で考えられている制約集合とその射影について説明する。

まず、1 つ目の制約集合 $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_1$ に対する射影 $P_1(A)$ は

$$\mathcal{C}_1 = \{ T \in \mathcal{H} \mid T \text{ は Toeplitz 行列} \}, \quad (2)$$
$$P_1(A) = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_0 \end{bmatrix} (A \in \mathcal{H}) \quad (3)$$

である。ここで、行列 T が Toeplitz 行列とは T の (i, j) 成分が任意の i, j に対して $t_{ij} = t_{i+1, j+1}$ となる行列のことである。また、 $A = (a_{ij})$ とし、 $P_1(A)$ の成分を $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ とする時、 $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ は以下のように計算される。

$$t_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad t_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii+1}, \quad (4)$$

$$t_2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} a_{ii+2}, \quad \dots, \quad t_{n-1} = a_{1n}. \quad (5)$$

次に 2 つ目の制約集合 $\mathcal{C}_2$ と $\mathcal{C}_2$ に対する射影 $P_2(A)$ は、

$$\mathcal{C}_2 = \{ T \in \mathcal{H} \mid T \succeq Q \}, \quad (6)$$

$$P_2(A) = U\Lambda_+U^T + Q \quad (A \in \mathcal{H}) \quad (7)$$

となる。 Q は $\mathcal{H}$ の正定値行列であり、 $A - Q = U\Lambda U^T$ は $A - Q$ の固有値分解である。また、 Λ_+ は $A - Q$ の固有値からなる対角行列の負の固有値を 0 で置換した行列である。

3 つ目の制約集合 $\mathcal{C}_3$ と $\mathcal{C}_3$ に対する射影 $P_3(A)$ は、

$$\mathcal{C}_3 = \{ T \in \mathcal{H} \mid \mathbf{r}_3 T \mathbf{r}_3^T \leq \gamma_3 \}, \quad (8)$$

$$P_3(A) = \begin{cases} A & (\mathbf{r}_3 T \mathbf{r}_3^T \leq \gamma_3) \\ \frac{\gamma_3 - \mathbf{r}_3 A \mathbf{r}_3^T}{\|\mathbf{r}_3\|^4} + A & (\mathbf{r}_3 T \mathbf{r}_3^T > \gamma_3) \end{cases}. \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{r}_3$ は特定の行ベクトル、 γ_3 は特定の正数である。

5 数値実験

式 (1) を射影法と Dykstra 法を用いて解を求めることを考える。Dykstra 法はそのまま最良近似問題に適用できる。しかし、射影法は制約可能性問題に適用するアルゴリズムであるため、集合の共通部分に収束するが、式 (1) を満たしている保証はない。そのため、制約集合 $\mathcal{C}_4$ を追加して最良近似問題に適用できる形にする。 $Q = 0.1I$, $\gamma_3 = 1$ とし、 A は乱数を発生させて作成した対称行列とした。実験を 100 回行い、解を求めた結果を表 1 に示す。表 1 より Dykstra 法の方が繰り返し回数が多いことがわかる。

表 1 数値実験の結果

	Dykstra 法		射影法	
TOL	時間	回数	時間	回数
10^{-3}	8.14×10^{-5}	19.14	4.41×10^{-5}	5.04
10^{-5}	8.05×10^{-5}	60.16	4.34×10^{-5}	8.85
10^{-10}	7.61×10^{-5}	123.33	4.62×10^{-5}	17.89

6 まとめと今後の課題

最良近似問題を具体的に検証し、また、2 つのアルゴリズムの違いを検証できた。実験結果より射影法の方が繰り返し回数がないことがわかった。しかし、射影法は解が求められているときにしか適用できないため、実用的ではない。そのため、今後の課題は、Dykstra 法を修正したり、新たなアルゴリズムを適用したりしてよりよいアルゴリズムを見つけることである。

また、正定値 Toeplitz 行列を求めることの工学的な意義と応用先を理解していくことも今後の課題である。

参考文献

- [1] K. M. Grigoriadis, A. E. Frazho, and R. E. Skelton, *Application of Alternating Convex Projection Methods for Computation of Positive Toeplitz Matrices*, IEEE Transactions on Signal Processing, (1994), 1873-1875
- [2] K. M. Grigoriadis, R. E. Skelton, *Alternating Convex Projection Methods for Discrete-Time Covariance Control Design*, Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 88, No.2, (1996), 399-432
- [3] Matthew Tam, *The Method of Alternating Projections*, University of Newcastle, 2012, Ph.D.thesis